

Παρατήρηση:

$$1) \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda \vec{a}\| = \sqrt{\langle \lambda \vec{a}, \lambda \vec{a} \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = |\lambda| \|\vec{a}\|$$

$$\begin{aligned} 2) \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 &= \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\ &= \|\vec{a}\|^2 + 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Καύσια} \\ \text{συμμετρικών} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Θεώρημα του Πυθαγόρα:

Έστω $\vec{a}, \vec{b} \in (E, \langle, \rangle)$ Τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι κάθετα αν και μόνο αν $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$

$$\text{Απόδειξη: } \vec{a}, \vec{b} \text{ κάθετα} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$$

~~Και~~ (από τον καύσια των συμμετρικών)
 με $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz: (SOS)

Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ δύο διανύσματα ενός Ευκλείδειου χώρου $(E, \langle, \rangle)$

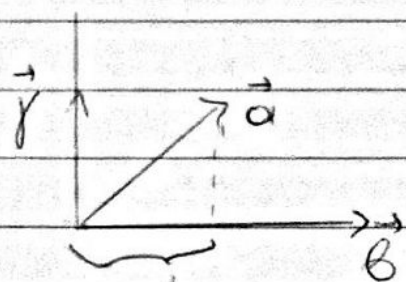
$$\text{Τότε } |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

$$(\text{ή } -\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|)$$

Αν $\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow$
 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \leq$
 $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| = 0$
 άρα η ανισότητα
 ισχύει ως ισότητα

και ισχύει η ιδιότητα αν και μόνο αν $\vec{a}, \vec{b}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα (όταν βάλουμε το 0 σε ένα είναι το διανυσματικό αυτό το είναι γίνεται διαν. χώρος)

Απόδειξη: Αν $b \neq 0$ $\angle \vec{b}, \vec{b} \neq 0$



$\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b} \sim$ Προβολή το $\vec{a}$ στο $\vec{b}$

$$\vec{y} = \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b} \quad (1)$$

• Τα διανύσματα $\vec{y}, \vec{b}$ είναι κάθετα

$$\langle \vec{y}, \vec{b} \rangle = \left\langle \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b}, \vec{b} \right\rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$$

• Τα διανύσματα $\vec{y}, \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b}$ είναι κάθετα

Παραγόμενο

Θεώρημα: $\left\| \vec{y} + \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b} \right\|^2 = \|\vec{y}\|^2 + \left\| \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b} \right\|^2$

① $\|\vec{a}\|^2 = \|\vec{y}\|^2 + \left| \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \right|^2 \|\vec{b}\|^2 \geq \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \|\vec{b}\|^2$

$\Rightarrow \|\vec{a}\|^2 \geq \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2}{(\|\vec{b}\|^2)^2} \|\vec{b}\|^2$

$\Rightarrow |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2$

$\Rightarrow \boxed{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$ Άρα η ανισότητα ισχύει

• $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0}$

Αλλά ① $\Rightarrow \vec{y} = \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{a} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \vec{b}$ Άρα $\vec{a}, \vec{b} \in \Gamma$.

• $\vec{a}, \vec{b} \in \Gamma \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b}$

$\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| = |\lambda| \|\vec{b}\| \|\vec{b}\| = |\lambda| \|\vec{b}\|^2$

$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| = |\langle \lambda \vec{b}, \vec{b} \rangle| = |\lambda| \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = |\lambda| \|\vec{b}\|^2$ Άρα, ισχύει η ανισότητα $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$

$$\vec{a}, \vec{b} \in (E, \langle, \rangle) \rightarrow \text{omrodinote euklidio xupa}$$

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

$$\Delta \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$1) |\operatorname{tr}(AB^t)| \leq \sqrt{|\operatorname{tr}(AA^t) \cdot \operatorname{tr}(BB^t)|}$$

$$\Delta \quad f(x), g(x) \in \mathbb{R}_n[x]$$

$$2) \text{ zote } \left| \int_0^1 f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(x) dx}$$

$$\Delta \quad (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

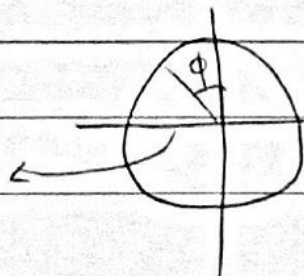
$$3) |x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

(and Cauchy-Schwarz)

$$\Delta \quad \vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$$

$$-1 \leq \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \leq 1 \quad \text{kar kur } \phi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \quad 0 \leq \phi < \pi$$

$$\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$



Ορισμός: Γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ (με $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$) ορίζεται η κοσινική γωνία ϕ με $\cos \phi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

$$\text{Άρα } \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \phi$$

Έστω $(E, \langle, \rangle)$

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ βάση

$\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ ορθογώνια βάση $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = 0 \quad i \neq j$

$\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ ————— $\rightarrow \langle \vec{f}_i, \vec{f}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

δ του Kronecker

Άσκηση 3: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \chi_C(x) = ;$

$$D = C^{1023} - 3C^{1022} - 4C^{1021} + 10C^{1020} - C^6 + 3C^5 + 3C^4 - 11C^3 + 4C^2 + 5C + I_3$$

$$i) \chi_C(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ -1 & -x & 4 \\ 0 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = \dots = -x^3 + 3x^2 + 4x - 10$$

Cayley-Hamilton: $x=C \Rightarrow -C^3 + 3C^2 + 4C - 10I = 0$

$$D = C^{1020} (C^3 - 3C^2 - 4C + 10I) + C^3 (-C^3 + 3C^2 + 4C - 10I) - C^3 + 4C^2 + 5C + I_3 =$$

$$= (-C^3 + 3C^2 + 4C - 10I_3) + C^2 + C + 11I_3 =$$

$$= C^2 + C + 11I_3$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

=

Πως θα βρω αντιστρέψιμο Cayley-Hamilton;
 Ο βαθμός προς 620 $\chi_C(x)$ είναι η οπίσθια
 δηλ, $\chi_C(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x - 10$, $\det = -10 \neq 0$
 Άρα αντιστρέψιμος

2ος τρόπος $f(x) = x^{1023} - 3x^{1022}$

$$F(x) = g(x) \chi_C(x) + r(x)$$

$$F(C) = g(C) \chi_C(C) + r(C) \Rightarrow D = g(C) \cdot 0 + r(C)$$

$$D = r(C)$$

$$\blacktriangleright -C^3 + 3C^2 + 4C - 10I_3 = 0_{3 \times 3}$$

$$\det C = -10 \neq 0$$

$$\text{Οέλω } C^{-1} = I_3$$

$$\Leftrightarrow -C^3 + 3C^2 + 4C = 10I_3$$

$$\Leftrightarrow C(-C^2 + 3C + 4I_3) = 10I_3$$

→ παρ' επέκει να είναι
invertible

$$\Leftrightarrow C \left(\frac{1}{10} (-C^2 + 3C + 4I_3) \right) = I_3$$

Παρ' ου έχω

$$\chi_A(x) \stackrel{x=A}{\Rightarrow}$$

$$\chi_A(A) = 0$$

$$\text{Αποκναι 4: } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i) E^n = E^{n-2} + E^2 - I_3 \quad \forall n \geq 3$$

$$ii) E^{100} = ;$$

$$iii) m_E(x) = ;$$

$$\text{Λύση: } \chi_E(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= (1-x)(x^2 - 1) = -x^3 + x^2 + x - 1$$

Αρα από Cayley-Hamilton:

$$-E^2 + E^2 + E - I_3 = O_{3 \times 3} \quad (1)$$

Με επαγωγή βζω n :

Για $n=3$: $E^3 \stackrel{(1)}{=} E^2 - E - I = E + E^2 - I$

Υβρω ότι ισχύει για $n=k$:

Smλ. $E^k = E^{k-2} + E^2 - I_3$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$:

$$E^{k+1} = E^k \cdot E = E(E^{k-2} + E^2 - I_3) =$$

$$= E^{(k+1)-2} + E^3 - E \stackrel{(1)}{=} E^{(k+1)-2} + E^2 - I_3$$

Αρα ισχύει για όλους τους φυσικούς $n \geq 3$

ii) $E^{100} = E^{98} + E^2 - I = E^{36} + 2(E^2 - I) = E^{94} + 3(E^2 - I)$
 $= \dots = E^2 - 49(E^2 - I)$

(n)

Ακρίβια

$$E^{2n} = E^2 + (n-1)(E^2 - I)$$

iii) $X_E(x) = -(x^2 - 1)(x+1) = -(x-1)^2(x+1)$ $\lambda \geq 1$
Έχων ως ιδίες ρίζες $\Rightarrow m_E(x) = (x-1)^k(x+1)^l$ $\lambda \geq 1$

$$m_E(x) \mid \chi_E(x) = -(x-1)^2(x+1)$$

$$(x-1)^2(x+1)^1 \mid -(x-1)^2(x+1)$$

$$\text{Άρα } \boxed{2 \geq k \geq 1} \quad \boxed{1 \geq l \geq 1}$$

$$\text{Άρα } m_E(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

$$m_E(x) = (x-1)^2(x+1)$$

Θέλω να ελέγξω να μισώμεν τον E

$$A_V \quad (E^2 - I) = 0 \quad \text{τότε } m_E(x) = x^2 - 1$$

$$A_V \quad E^2 - I \neq 0 \quad \text{τότε } m_E(x) = (x^2 - 1)^2(x+1) = -\chi_E(x)$$

$$E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \quad \text{Άρα } E^2 \neq I$$

$$\text{Άρα } m_E(x) = (x-1)^2(x+1)$$

Έτσι ο E διαγωνίζεται.

Όχι, αφού το $m_E(x)$ δεν έχει γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους

Είναι ο E αντιστρέψιμος και αν ναι, $E^{-1} = ?$

Είναι αντιστρέψιμος, γιατί αν βάλω στο $\chi_E(x)$ όταν $x=0$ δηλ. $\det(E) = \chi_E(0) = -1 \neq 0$

Άρα αντιστρέφεται

$$-E^3 + E^2 + E - I_3 = 0$$

$$\Rightarrow I_3 = E(-E^2 + E + I)$$

$$\text{Άρα } E^{-1} = -E^2 + E + I$$

Άσκηση 5

$X, Y = ?$

$$X^2 = Y^3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Σημειώσεις:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 3 \end{pmatrix}^2$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{9} \end{pmatrix}^3$$

Είναι ο A διαγωνίσιμος;

ΝΑΙ! $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 9-x & 0 & 0 \\ 0 & 4-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (9-x)(4-x)(1-x)$

Ιδιότητες: 9, 4, 1 (Αλγ. πολ/τες εδώ όλες 1)

Περαιτέρω να βρω γεωμ. πολ/τα $1 \leq \dim V(9) < 3$

Αλγ. πολ/τα

Πάλι τους ιδιοχώρους να βρω ιδιοδιανύσματα

$$V(9) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \mid (A - 9I)x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 \rightarrow r_1 / -5 \\ r_3 \rightarrow r_3 / -8 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) r_2 - r_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 0y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ z = t \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{array}$$

Άρα $V(9) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$V(4) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \mid (A - 4I)x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\text{rank}(A) = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \dots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y = t \end{array}$$

Άρα $V(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$V(1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \mid (A - I)x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{array}$$

$$\text{Άρα } V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Άρα τα ιδιοδιανύσματα } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ είναι}$$

βάση

Άρα ο A διαγωνίζεται (αφού έχει βάση των αυτοδιανυσμάτων)

$$\Delta \quad \left(\begin{array}{ccc} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (P^{-1}) \left(\begin{array}{ccc} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

↑ ↑ ↑
ιδιοδιανύσματα

Για διτταν p-1

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = [I]_e^a \quad [F_A]_a^a = [I]_e^a [F_A]_e^e [I]_a^e$$

$$[I]_e^a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ x+y \\ x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{matrix}$$

$$I_{e_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \dots$$

Άρα $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Έχει να είναι ο ίδιος)

Οnde $\mu_A(x) = x^2 - 1$
Αφού $P = P^{-1}$
παρά $x^2 = I$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $I_{e_1} \quad I_{e_2} \quad I_{e_3}$

Gua X^2 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = P^{-1}AP$$

$$\Rightarrow P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \underbrace{PP^{-1}}_I A \underbrace{PP^{-1}}_I$$

Onóze $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

$$= \left(P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^2$$

Apa o ninukas X éua o $P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

Gua Y^3 :

$$\begin{pmatrix} \sqrt[3]{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt[3]{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

$$= \dots P \begin{pmatrix} \sqrt[3]{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \sqrt[3]{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \sqrt[3]{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \left(P \begin{pmatrix} \sqrt[3]{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^3$$